161 - Distances et isométries d'un espace affine euclidien.

Cadre : Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$, et soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E. On note $\|.\|$ la norme issue du produit scalaire.

I Distances d'un espace affine euclidien

1) Définitions et premières propriétés

Définition 1. Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit espace vectoriel euclidien. Un espace affine euclidien est un espace affine dirigé par un espace vectoriel euclidien. On définit la distance de deux points A et B par $d(A, B) = \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = AB$.

Proposition 2. *$(\mathcal{E}, d)$ définit bien un espace métrique.*

Définition 3. Pour $A \subset \mathcal{E}$ et $x \in \mathcal{E}$, on définit la distance de x à A par :

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$$

Proposition 4. *Soient $x \in E$ et F un sous-espace vectoriel de E. Alors $y \in E$ est la projection orthogonale de x sur F si, et seulement si, $y \in F$ et $d(x, F) = \|x - y\|$.*

2) Matrice et déterminant de Gram

Définition 5. On appelle matrice de Gram de $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la matrice $M_G(x_1, \ldots, x_n) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, et déterminant de Gram le déterminant de cette matrice, noté $G(x_1, \ldots, x_n)$.

Lemme 6. *Le déterminant de Gram d'une famille de vecteurs est nul si, et seulement si, elle est liée.*

Théorème 7. *Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$ muni d'une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Alors, pour tout $x \in E$, on a :*

$$d(x, F)^2 = \frac{G(e_1, \ldots, e_n, x)}{G(e_1, \ldots, e_n)}$$

Théorème 8 (Hadamard)**.** *(i) Soient $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs de E. Alors $G(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \prod_{i=1}^n \|x_i\|^2$.*

(ii) Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}^n$. Alors $|\det(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant \prod_{i=1}^n \|x_i\|_2$.

Dans les deux cas, on a égalité si, et seulement si, $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est orthogonale ou l'un des vecteurs est nul.

II Isométries d'un espace affine euclidien

1) Définitions et premières propriétés

Définition 9. Une isométrie vectorielle est une application linéaire qui conserve la norme. On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E dans E.

Remarque 10. *Une isométrie vectorielle conserve le produit scalaire, donc l'orthogonalité.*

Définition 11. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines euclidiens. Une isométrie affine est une application affine $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ telle que $d(\varphi(A), \varphi(B)) = d(A, B)$ pour tous $A, B \in \mathcal{E}$. On note $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries vectorielles de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.

Exemple 12. *Les translations, les rotations et les symétries orthogonales sont des isométries.*

Proposition 13. *Une application affine est une isométrie affine si, et seulement si, sa partie linéaire est une isométrie vectorielle.*

Théorème 14. *$(\mathcal{O}(E), \circ)$ et $(\mathrm{Isom}(\mathcal{E}), \circ)$ sont des groupes.*

Proposition 15. *Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par une isométrie $f \in \mathcal{O}(E)$. Alors $F^\perp$ est stable par f.*

2) Structure des isométries

Définition 16. On appelle réflexion toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan. Ce sont des isométries.

Théorème 17. *Toute isométrie de E peut s'écrire comme composée de p réflexions pour un entier $p \leqslant n$.*

Théorème 18. *Toute isométrie de $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$ peut s'écrire comme composée de p réflexions pour un entier $p \leqslant n + 1$.*

Définition 19. On dit qu'une isométrie est un déplacement si son déterminant est positif. Une isométrie qui n'est pas un déplacement est un anti-déplacement.

Proposition 20. *(i) Les isométries sont des bijections.*

(ii) Les déplacements $\mathrm{Isom}^+(\mathcal{E})$ forment un sous-groupe de $\mathrm{Isom}(\mathcal{E})$.

(iii) Les déplacements préservent les orientations de l'espace.

III Groupe orthogonal

1) Propriétés et réductions

Proposition 21. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et soit M sa matrice dans une base de E. Alors $u \in \mathcal{O}(E)$ si, et seulement si, ${}^{\mathrm{t}}MM = M\,{}^{\mathrm{t}}M = I_n$.*

Proposition 22. *Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Alors :*

(i) $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$.

(ii) $\det(u) = \pm 1$. *En particulier, u est inversible.*

Proposition 23. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $u \in \mathcal{O}(E)$ si, et seulement si, transforme toute base orthonormée en une base orthonormée.*

Théorème 24. *Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors M est semblable à :*

$$\begin{pmatrix} I_r & & & & 0 \\ & -I_m & & & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & R_{\theta_s} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \theta_i \in]0; 2\pi[\setminus \{\pi\} \\ R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix} \end{cases}$$

2) Topologie du groupe orthogonal

Proposition 25. *$\mathcal{O}(E)$ est une partie compacte de $\mathcal{L}(E)$.*

Proposition 26. *Les composantes connexes de $\mathcal{O}(E)$ sont les fermés $\mathcal{O}^+(\mathbb{R}^2)$ et $\mathcal{O}^-(\mathbb{R}^2)$*

Théorème 27 (Décomposition polaire)**.** *On a les homéomorphismes :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \longmapsto & OS \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{U}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (U, H) & \longmapsto & UH \end{array}$$

Corollaire 28. *Pour $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, on a $|||A|||_2 = \sqrt{\rho({}^{\mathrm{t}}AA)}$*

Corollaire 29. *Tout sous-groupe compact de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ qui contient le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est le groupe $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ lui-même.*

IV Applications en dimensions 2 et 3

1) Classification des isométries

Proposition 30 (Étude en dimension 2)**.** *Soient $u \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ et A sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.*

(i) Si $u \in \mathcal{O}^+(\mathbb{R}^2)$, alors il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. u est alors la rotation d'angle θ centrée en l'origine.

(ii) Si $u \notin \mathcal{O}^+(\mathbb{R}^2)$, alors il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$. u est alors la symétrie par rapport à la droite d'angle polaire $\frac{\theta}{2}$.

Proposition 31 (Étude en dimension 3)**.** *Soient $u \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$. Il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est :*

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

pour un $\theta \in [0, 2\pi[$ et où $\varepsilon = \pm 1$. De plus :

(i) Si $u \in \mathcal{O}^+(\mathbb{R}^2)$, alors $\varepsilon = 1$. u est alors une rotation d'angle θ autour d'une droite.

(ii) Si $u \notin \mathcal{O}^+(\mathbb{R}^2)$, alors $\varepsilon = -1$. u est alors la composée d'une rotation d'angle θ autour d'une droite D puis d'une symétrie orthogonale par rapport à $D^\perp$.

2) Similitudes en dimension 2

On suppose ici E de dimension 2.

Définition 32. On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est une similitude vectorielle s'il existe $k > 0$, appelé rapport de la similitude, tel que, pour tout $x \in E$, on a $\|f(x)\| = k\,\|x\|$.

Exemple 33. *Les isométries et les homothéties sont des similitudes.*

Définition 34. Une similitude est dite directe ou indirecte selon que son déterminant est positif ou négatif.

Proposition 35. *Toute similitude vectorielle directe est composée d'une homothétie de rapport positif et d'une rotation vectorielle. Toute similitude vectorielle indirecte est composée d'une homothétie de rapport positif et d'une réflexion.*

Proposition 36. *Soit f une similitude vectorielle de rapport k. Il existe une unique isométrie vectorielle u telle que $f = h_k \circ u$, où h_k est l'homothétie de rapport k.*

Définition 37. On appelle similitude affine toute application affine dont la partie linéaire est une similitude vectorielle.

Proposition 38. *Une similitude de $\mathcal{E}$ qui n'est pas une isométrie a un unique point fixe, appelé centre de la similitude.*

Proposition 39. *(i) Les similitudes directes conservent les angles.*

(ii) Les similitudes directes envoient les droites sur des droites.

(iii) Une similitude directe de rapport k envoie un cercle de rayon R sur un cercle de rayon kR dont le centre est l'image du centre.

3) Liens avec les polyèdres en dimension 3

On suppose ici E de dimension 3.

Définition 40. Un polyèdre convexe de E est dit régulier si toutes ses faces sont des polygones réguliers isométriques, et si en chaque sommet elles s'assemblent de la même manière, au sens où les figures formées par les réunions des arêtes aboutissant à un sommet sont isométriques.

Exemple 41. *Il y a 5 polyèdres réguliers : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre.*

Théorème 42. *Soit $\mathcal{T}$ un tétraèdre régulier de l'espace affine euclidien de dimension 3. Le groupe $\mathrm{Isom}(\mathcal{T})$ des isométries préservant $\mathcal{T}$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.*

Application 43. *La table de caractères de $\mathfrak{S}_4$ est :*

$\mathfrak{S}_4$	Id	(ab)	$(ab)(cd)$	(abc)	$(abcd)$
1	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1
χ	3	1	-1	0	-1
$\varepsilon\chi$	3	-1	-1	0	1
θ	2	0	2	-1	0

Remarque 44. *On peut lire les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_4$ sur cette table de caractères.*

Développements

— Table de caractères de $\mathfrak{S}_4$ et isométries du tétraèdre (42,43) [Ser70]

— Déterminant de Gram et inégalité de Hadamard (6,7,8) [Gou94]

Références

[Aud06] M. Audin. *Géométrie.* EDP Sciences

[Gou94] X. Gourdon. *Les Maths en Tête : Algèbre.* Ellipses, 2e édition

[Gri11] J. Grifone. *Algèbre Linéaire.* Cépaduès, 4e édition

[Ser70] J.-P. Serre. *Représentations linéaires des groupes finis.* Hermann